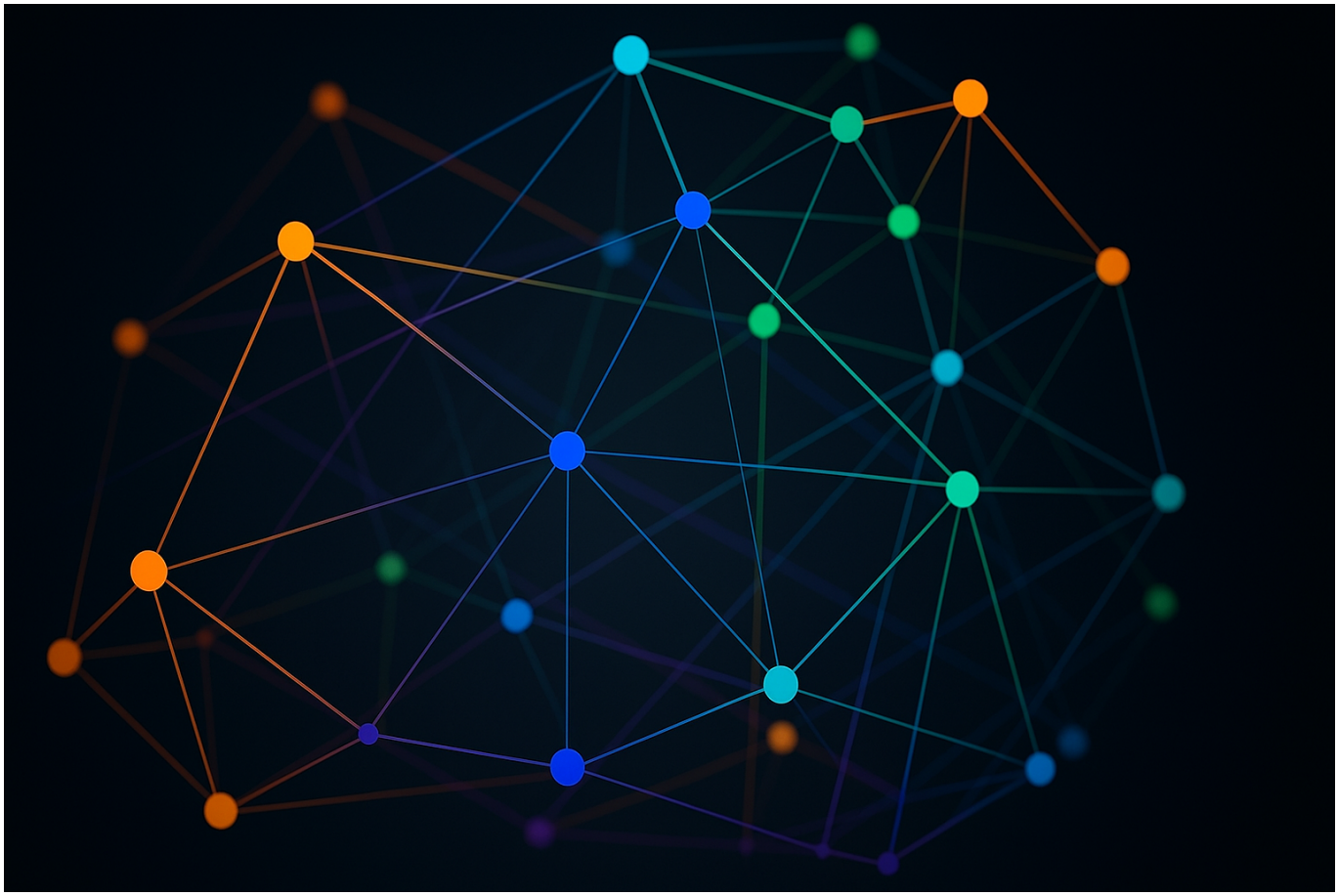
Pintando hipergráficas r-uniformes

Por Johana Luviano Flores

30/10/2025 | **https://doi.org/10.63083/lamec.2025.59.jlf**



Los inicios de la teoría de gráficas se dan al considerar la coloración de los vértices de una gráfica, concepto que nació a raíz del problema planteado por Francis Guthrie en 1852, donde se pregunta si cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa geográfico, de tal manera que países vecinos (es decir, países que comparten frontera) reciban distinto color. Este problema también conocido como la

conjetura de los cuatro colores, fue demostrado en 1976, más de 150 años después de su planteamiento. Desde entonces, una gran cantidad de investigación se ha desarrollado dentro de la así llamada, Teoría de coloraciones en gráficas, resultando esta, ser una de las áreas más estudiadas y aplicadas de la teoría de gráficas. En 1972 Karp incluye las coloraciones en gráficas en la

primera lista de problemas conocidos como *NP*-completos, lo que motiva el desarrollo de algoritmos heurísticos de las coloraciones.

Una gráfica $G = V(G),E(G)$ consta de un conjunto de puntos $V(G)$ (llamados vértices) y líneas que unen puntos distintos de $V(G)$, llamados aristas $E(G)$. Las hipergráficas, en particular las hipergráficas r-uniformes $H = (V(H),E(H))$, generalizan a las gráficas clásicas al permitir que el conjunto de aristas $E(H)$, conste en subconjuntos de tamaño r del conjunto de vértices $V(H)$. Está estructura es crucial para modelar sistemas complejos donde se dan relaciones multidireccionales. Las coloraciones de los vértices o aristas de una gráfica juegan un papel central en diversos problemas matemáticos tanto teóricos como aplicados, por lo cual resulta natural extender las coloraciones de los vértices o aristas de hipergráficas r-uniformes, este es un problema central en la combinatoria moderna, vincula cuestiones teóricas profundas con aplicaciones prácticas en informática, biología y optimización. A diferencia de las gráficas tradicionales, las hipergráficas permiten que las aristas conecten más de dos vértices, lo que origina estructuras más ricas y desafíos de coloración más complejos. Veamos una introducción accesible a los conceptos fundamentales de las hipergráficas r-uniformes y algunos tipos de coloración de vértices utilizados para analizarlos. Se conocen algunos resultados matemáticos importantes, destacamos las dificultades computacionales y vemos cómo estas ideas se aplican a problemas del mundo real, como la asignación de recursos, el análisis de datos y la bioinformática. Diseñado para estudiantes, docentes y profesionales que se inician en el campo, este artículo sirve como puerta de entrada al vibrante y creciente mundo de la teoría de hipergráficas.

Coloreando gráficas

Dada una gráfica G, una coloración buena de sus vértices es colorear sus vértices de manera que las artistas unen vértices de diferente color. El mínimo número de colores que se necesitan para que la gráfica G tenga una coloración buena se llama su número cromático y se denota por χ (G). Otro parámetro importante de una gráfica, que está relacionado con el número cromático es el número de clan de G, que es el tamaño máximo sobre todos los subconjuntos de vértices con una arista que une a cada par de vértices distintos y se denota por ω (G). Claramente, cualquier coloración buena de G, asigna un color diferente a cada vértice de los clanes de G. Así, ω (G) $\leq$ χ (G). Nos surge la duda si el número cromático depende del número de clan. La respuesta es no, ya que existen gráficas sin triángulos con número cromático arbitrariamente grande.

Hay varios resultados donde se muestra que esta desigualdad puede ser tan grande como se quiera. Una de ellas es la construcción de Mycielski la cual a partir de una gráfica libre de triángulo con número cromático k, se obtiene una nueva gráfica libre de triángulos con número cromático k+1. Un resultado general es el siguiente

Teorema: [Paul Erdös] Para cualesquiera enteros positivos s y k, existe una gráfica con cuello s y número cromático k.

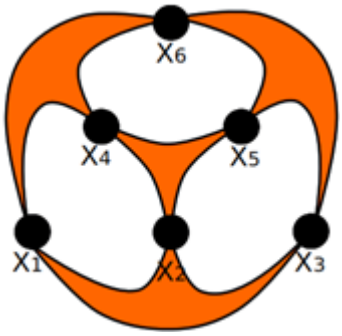
Donde el cuello de la gráfica es la longitud del ciclo más pequeño que contiene. Este resultado se demostró utilizando el método probabilístico para gráficas y más tarde por P. Erdös y A. Hajnal para hipergráficas. Pocos años después, Lovás proporciona una prueba constructiva bastante complicada de este hecho y Nešetřil con Rödl sugieren una más simple poco después ambas construcciones son recursivas y funcionan para gráficas y r-hipergráficas al mismo tiempo.

Coloreando hipergráficas r-uniformes

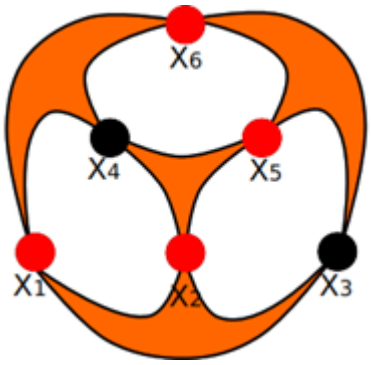
Ahora, veremos que existen varias formas de generalizar el concepto de coloración para r-hipergráficas G^r

(hipergráficas con todas sus hiperaristas de tamaño r). Una de ellas llamada coloración débil que consiste en asignar un color a cada vértice de G^r con la condición de que no contenga aristas monocromáticas y si todas las aristas son heterocromáticas, se le llama coloración fuerte. De esta manera, el número cromático débil χ_d (G^r) y el número cromático fuerte χ_s (G^r) de G^r, se define como el mínimo número de colores necesarios para colorear una r-hipergráfica débil o fuertemente respectivamente. Claramente cada coloración fuerte es una coloración débil, así χ_d $(G^r) \leq \chi_s$ (G^r) para toda r-hipergráficas G^r.

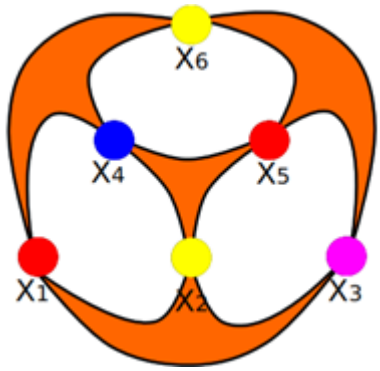
Consideremos la siguiente 3-hipergráfica G^3 con vértices x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 y aristas $\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_4,x_6\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_3,x_5,x_6\}$.



Su número cromático débil es χ_d $(G^3)=2$,



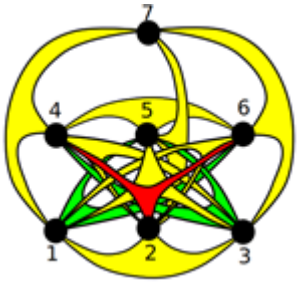
mientras que su número cromático fuerte es χ_s $(G^3)=4$.



El número de clan de G^r, ω (G^r), es el máximo número de vértices de una r-subhipergráfica completa de G^r.

Sin embargo, la desigualdad ω $(G) \leq \chi$ (G) , no funciona como era de esperarse para el número cromático débil de una r-hipergráficas G^r. Si consideramos la siguiente gráfica vemos que tiene número de clan 3,

mientras que su número cromático débil es 2.



Aunque, si se tiene para el caso fuerte, esto es, $\omega(G^r) \leq \chi_s(G^r)$. Considerando estos hechos es natural preguntarse lo siguiente, ¿para que el número cromático de G^r sean k es necesario que G^r contenga una r-subhipergráficas completas de tamaño k?

La respuesta a esta pregunta es negativa, de hecho, se sabe que existen r-hipergráficas con cuello pequeño y número cromático débil o fuerte arbitrariamente grande.

Coloreando ahora de manera fraccional

Así, como una coloración de una gráfica es la asignación de un color a cada vértice de la gráfica de manera que vértices adyacentes tengan diferente color, se puede asignar a cada vértice un conjunto de b-colores de tal forma que vértices adyacentes tengan conjuntos disjuntos de colores y preguntarse por el mínimo número de colores $\chi_b(G)$ necesarios para colorear dicha gráfica. De esta manera, el número cromático fraccional $\chi_f(G)$, se define grosso modo como el límite de la función $\chi_b(G)$ cuando b tiende a infinito.

Este concepto ha sido ampliamente estudiado en Fractional Graph Theory de Edward y Ullman, dentro del área de programación lineal entera y se dice que el número cromático fraccional de una gráfica G, es la relajación real de su número cromático. Así mismo, las versiones fraccionales de los números cromáticos débil y fuerte de una r-hipergráficas son las relajaciones reales de los problemas enteros correspondientes. En el caso de gráficas, $\omega(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)$. En 1995 Larsen, Propp, y Ullman usaron la construcción de Mycielski para mostrar que al igual que la distancia entre χ_f y ω, ambas distancias en la desigualdad pueden ser arbitrariamente grandes.

Se sabe que las diferencias en la desigualdad pueden ser también arbitrariamente grande al considerar r-hipergráficas, tanto para el número cromático débil como para el fuerte. Para verificarlos se tienen dos construcciones de familias de r-hipergráficas sin r-subhipergráficas de orden r+1. Es preciso señalar que, para coloraciones fuertes, la construcción de Mycielski se puede generalizar de manera directa. Sin embargo, para coloraciones débiles, la misma construcción no se puede generalizar directamente. En consecuencia, existen construcciones alternativas, inspiradas en la construcción de Mycielski.

Cuando se fraccionalizan algunas definiciones de la teoría de gráficas, se origina la teoría de gráficas fraccional que ha sido estudiada durante la última década y ha servido para obtener varios resultados elegantes y profundos (completos o parciales), ampliándose el número de aplicaciones. Más aún, esta teoría ha ayudado a comprender mejor algunos problemas complicados de la teoría de gráficas.

Varios de los resultados fraccionarios se pueden estudiar como problemas primales y sus duales en Programación Lineal Entera. Por ejemplo, el número cromático y número de clan de una gráfica resultan ser las soluciones enteras de un problema primal y su dual respectivamente, y al considerar las soluciones

racionales del problema primal y su dual se obtiene el número cromático fraccional y el número de clan fraccional respectivamente.

Conclusión

Hemos indagado en el mundo de las coloraciones de gráficas solo en vértices, pero también existen otras maneras de colorear una gráfica por aristas, vértices, pensando en sus ciclos, trayectorias, etc. Ahora al pensar todo esto para hipergráficas uniformes vemos que resultan teoremas más generales que sirven para modelar diferentes aplicaciones. Las coloraciones en hipergráficas uniformes representan un marco teórico rico con profundas implicaciones prácticas. Para los ingenieros, estas herramientas proporcionan mecanismos para modelar, simular y optimizar sistemas multiagente con recursos compartidos y restricciones complejas. La investigación en curso continúa descubriendo algoritmos más eficientes y perspectivas combinatorias más profundas.

BIO

Johana Luviano Flores

Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco

Más artículos del autor

La Mecedora Divulga is licensed under CC BY-NC-ND 4.0